

Base: sequența liberă de generatori: $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$
 și
 membrii de vectori din $V(K)$:
 sequența de membrii.

$$\bar{v} = d_1 \bar{v}_1 + \dots + d_n \bar{v}_n$$

• definiția un isomorfism

$$\Phi_B: V(K) \longrightarrow K^n$$

$$\bar{v} = d_1 \bar{v}_1 + \dots + d_n \bar{v}_n \longrightarrow (d_1, \dots, d_n).$$

Se $V(K)$ este finit generat și $V(K) \neq \{0\} \Rightarrow$
 $V(K)$ are mereu cel puțin o bază.

Teoremă: Dacă $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ este o bază, atunci
 $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n) \in B \Leftrightarrow$

- S legata $\Leftrightarrow$ almeno un suo vettore è c. lineare dei rimanenti.

- S legata $\Leftrightarrow \exists \bar{v}_i \in S: L(S) = L(S \setminus \{\bar{v}_i\})$.

Data S sequenza di generatori per $V(k)$, S finita:

- 1) $S = \emptyset \Rightarrow V(k) = \{0\} \Rightarrow \text{FINE}$
- 2) $S \neq \emptyset$ e libera $\Rightarrow S$ base $\Rightarrow \text{FINE}$
- 3) $S \neq \emptyset$ e legata $\Rightarrow S \leftarrow S \setminus \{\bar{v}_i\}$ ove $\bar{v}_i$ c. lineare dei rimanenti

4) tornare al punto 1.

oss: Sia S una sequenza di generatori & $S \subseteq S' \Rightarrow S'$ è di generatori

$$V = L(S) \subseteq L(S') \subseteq V \Rightarrow L(S') = V$$

Sia S una sequenza libera & $S' \subseteq S \Rightarrow S'$ è libera
 $S' \neq \emptyset$

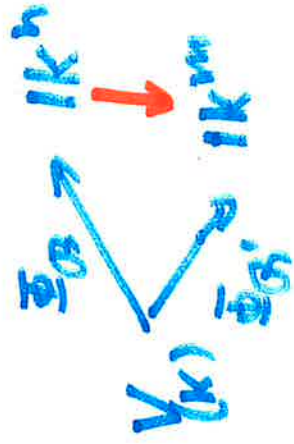
Se fosse S' legata $\Rightarrow \exists$ una c. lineare a coeff. non tutti 0
 di vettori di S' che dà 0

$$\alpha_1 \bar{s}'_1 + \dots + \alpha_k \bar{s}'_k = \underline{0} \quad (\alpha_1 \dots \alpha_k) \neq \underline{0}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \bar{s}'_1 + \dots + \alpha_k \bar{s}'_k + \sum_{\bar{s} \in S \setminus S'} 0 \cdot \bar{s} = \underline{0} \quad \text{con coeff. non tutti 0} \quad \text{u} \\ \Rightarrow \text{Libera.}$$

Teorema: Sia $V(k)$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. (fr. gen.).

Allora tutte le basi di $V(k)$ hanno la medesima
 cardinalità.



$$|B| = n \quad |B'| = m$$

$$n = 3 \quad m = 2$$

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ isom.??}$$

Def: Sia $V(K)$ uno sp. vettoriale.

Se $V(K) = \{0\} \Rightarrow \text{si può dire } \dim V(K) = 0$ $\dim = \text{dimensione}$.

Altrimenti $\dim V(K) = |\mathcal{B}|$ ove $\mathcal{B}$ base di $V(K)$.

- Le proprietà di $V(K)$ come spazio vettoriale, nel caso $\dim V(K) < \infty$ dipendono essenzialmente solo da K e da $n = \dim V(K)$.

Es: $W = \{(a, b, a^2 + b^2) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

$$\hat{f}: W \times W \rightarrow W \\ (a, b, c) \hat{f} (a', b', c') \rightarrow (a+a', b+b', (a+a')^2 + (b+b')^2).$$

$$\hat{g}: K \times W \rightarrow W \rightarrow V \\ \alpha, (a, b, c) \rightarrow (\alpha a, \alpha b, \alpha^2 c).$$

$(W, \hat{+}, \hat{\cdot})$ è s. vettoriale su $\mathbb{R}$.

NOTIAMO CHE W ha come base $(101), (011)$

$$\alpha \cdot (101) \hat{+} \beta (011) = (\alpha 0 \alpha^2) \hat{+} (\alpha \beta \beta^2) = (\alpha \beta \alpha^2 + \beta^3).$$

$$W \cong \mathbb{R}^2$$

Es. $W = \{(\alpha, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Non è sott. di $\mathbb{R}^2$ ma è un s. vett. su $\mathbb{R}$

$$(\alpha, 1) \hat{+} (\beta, 1) = (\alpha + \beta, 1)$$

$$\alpha^2 (\alpha, 1) = (\alpha \alpha, 1).$$

$$W \cong \mathbb{R}$$

N.B. il vettore nullo di W con le operazioni date è $(0, 1)$.

Lemmas di Steinitz: Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale su K finitamente generato.

A una sua s.p. $\bar{a}$ libera $(\bar{a}_1 \dots \bar{a}_m)$

B una sua s.p. di generatori $(\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n)$

ALLORA $m \leq n$. $|A| \leq |B|$.

Una sequenza A libera contiene al più tanti vettori quanti una seq. di generatori.

Corollario: se B e B' sono 2 basi di un medesimo sp. vettoriale finitamente generato $\Rightarrow |B| = |B'|$.

Dim: B libera, B' di gen $\Rightarrow |B| \leq |B'|$ $\Rightarrow |B| = |B'|$ $\square$
 B di gen, B' libera $\Rightarrow |B| \geq |B'|$

DIM (STEINITZ). Per assurdo: supponiamo $m > n$

$$A = (\bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n \dots \bar{a}_m) \text{ libera}$$

$$B = (\bar{b}_1 \bar{b}_2 \dots \bar{b}_n) \text{ di generatori.}$$

n passaggi.

$$(p=1) \quad \bar{a}_1 \in \mathcal{L}(B) \text{ poiché } A \text{ è libera}$$

$$\bar{a}_1 \neq 0 \Rightarrow \bar{a}_1 = \beta_{11} \bar{b}_1 + \dots + \beta_{1n} \bar{b}_n$$

$$\text{con } (\beta_{11} \dots \beta_{1n}) \neq (0 \dots 0)$$

$$\text{WLOG supponiamo } \beta_{11} \neq 0 \Rightarrow \exists \beta_{11}^{-1} \in K$$

$$\Rightarrow \beta_{11}^{-1} \beta_{11} \bar{b}_1 = \beta_{11}^{-1} (\bar{a}_1 - \beta_{12} \bar{b}_2 - \dots - \beta_{1n} \bar{b}_n)$$

$$\parallel \bar{b}_1$$

$$\Rightarrow \bar{b}_1 \in \mathcal{L}(\bar{a}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_n)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\bar{b}_1 \bar{b}_2 \dots \bar{b}_n) \subseteq \mathcal{L}(\bar{a}_1 b_2 \dots b_n).$$

||
V

$\Rightarrow$ LA SEQUENZA

$B_1 := (\bar{a}_1 \bar{b}_2 \dots \bar{b}_n)$ è di generatori.

$$p=2: \quad \bar{a}_2 \in \mathcal{L}(B_1) \Rightarrow \bar{a}_2 = \alpha_{21} \bar{a}_1 + \beta_{22} \bar{b}_2 + \dots + \beta_{2n} \bar{b}_n$$

e non può essere $(\beta_{22} \dots \beta_{2n}) = (00 \dots 0)$

perché altrimenti $\bar{a}_2 \in \mathcal{L}(\bar{a}_1)$ ma A è libera.

WLOG $\beta_{22} \neq 0 \Rightarrow \bar{b}_2 \in \mathcal{L}(\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{b}_3 \dots \bar{b}_n)$

$\Rightarrow B_2 = (\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{b}_3 \dots \bar{b}_n)$ di generatori.

$$\begin{array}{l}
 A = (\bar{a}_1 \quad \bar{a}_2 \quad \dots \quad \bar{a}_n \quad \dots \quad \bar{a}_m) \text{ libera} \\
 B = (\bar{b}_1 \quad \bar{b}_2 \quad \dots \quad \bar{b}_n) \\
 B_1 = (\bar{a}_1 \quad \bar{b}_2 \quad \dots \quad \bar{b}_n) \\
 B_2 = (\bar{a}_1 \quad \bar{a}_2 \quad \dots \quad \bar{b}_n) \\
 \vdots \\
 B_n = (\bar{a}_1 \quad \bar{a}_2 \quad \dots \quad \bar{a}_n)
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} A \\ B \\ B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{array}} \right\} \text{di generatori.}$$

$B_n \subseteq A$ è una sequenza di generatori.

$\bar{a}_m \notin B_n$ perché $m > n$

ma $\bar{a}_m \in \mathcal{L}(B_n) \Rightarrow \bar{a}_m$ è linearmente dipendente
da i vettori di $B_n \subseteq A$

$\Rightarrow \bar{\alpha}_m$ è comb. lineare di vettori diversi da lui
 in A e dunque A è legata by
 ASSURDO perché abbiamo supposto A libera $\square$
 $\Rightarrow m \leq n$

$$\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}((100), (010), (001))$$

$$S = ((100), (010)) \text{ NON GENERA}$$

$$\alpha(100) + \beta(010) = (\alpha \beta 0) = (000)$$

$\Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$

Conseguenze del lemma di Steinitz.

1) Ogni base di $V(K)$ (con $V(K)$ f.g.) ha lo stesso numero di elementi. $\rightarrow$ DIMENSIONE DI $V(K)$ o $\dim V(K) = \dim V(K)$

$$\dim \mathbb{R}^0 = 0$$

In generale scrivendo $V_n(K)$ per indicare che la dimensione di $V(K)$ è n .

2) In $V_n(K)$ ogni sequenza di $m > n$ vettori è legata. ogni sequenza di $m < n$ non può essere di generatori.

DIM: $\exists$ una base di n vettori $\Rightarrow$

$\exists$ una seq. di generatori di n vettori $\Rightarrow$

NESSUNA SEQ. LINEARE HA PIÙ DI n vettori $\Rightarrow$

OGNI SEQ. DI $m > n$ VETTORI È LEGATA.

$\exists$ una seq. libera di n vettori $\Rightarrow$
 NESSUNA seq. di GENERATORI HA PIÙ DI
 n VETTORI $\Rightarrow$
 OGNI seq. di $m < n$ VETTORI NON GENERA.

3) Sia $S = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ una sequenza di n vettori che
genera $V_n(K) \Rightarrow S$ è libera e dunque base.
 Sia $T = (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n)$ una sequenza di n vettori libera
 di $V_n(K) \Rightarrow S$ è di generatori e dunque base.

DM: S di generatori; $|S| = n$. Se S libera $\Rightarrow$ per gli
 scalari successivi $\exists \bar{v}_i: \bar{v}_i \in S: L(S) = L(S \setminus \{\bar{v}_i\}) \Rightarrow$
 $\Rightarrow S \setminus \{\bar{v}_i\}$ di generatori e $|S \setminus \{\bar{v}_i\}| = n - 1 < n$ ∇
 $\Rightarrow S$ libera.

$\mathcal{L}$ libero. Se τ non è generatore $\Rightarrow \exists \bar{w}_{n+1} \in V$
tale che $\bar{w}_{n+1} \notin \mathcal{L}(\tau)$.

In particolare $\tau \cup \bar{w}_{n+1}$ sarebbe libero perché

e $\exists$ una c. lineare e coeff. non tutti 0

tale che $\alpha_1 \bar{w}_1 + \dots + \alpha_n \bar{w}_n + \beta \bar{w}_{n+1} = 0$

dovrebbe essere $\beta \neq 0$ perché τ è libero $\Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{w}_{n+1} = -\beta^{-1}(\alpha_1 \bar{w}_1 + \dots + \alpha_n \bar{w}_n) \in \mathcal{L}(\tau)$. ug.

$\Rightarrow \exists$ una sequenza libera di $n+1 > n$ vettori:

in $V_n(K)$ ug.

NE SEGUE $\mathcal{L}$ di GENERATORI ⁰

(4) $\forall i = 0, \dots, n$, lo spazio vettoriale $V_n(K)$ contiene

sottospazi di dimensione i ; in particolare,

SOTTOSPACI
 $\left[\begin{array}{l} x \ i=0 \Rightarrow \{0\} \subseteq V_n(1k) \\ x \ i=n \Rightarrow \text{un sott. di dim} = n \text{ di } V_n(1k) \text{ deve} \\ \text{coincidere con } V_n(1k). \end{array} \right.$

$$\left[W \subseteq V_n(1k) \ \& \ \dim W = n \Leftrightarrow W = V_n(1k) \right]$$

Dim Supponiamo $B = \text{base di } V_n(1k) \quad B = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$.

$\forall i$ Se $i=0$, prendiamo $\{0\} \subseteq V_n(1k)$.

Altrimenti possiamo $W := L(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_i)$

$$\dim(W_i) = i$$

Supponiamo $W \subseteq V_n(1k)$ e $\dim W = n$. Allora

W ammette una base $(\bar{w}_1 \dots \bar{w}_n)$ formata da n

vettori di $V_n(\mathbb{K})$.

I vettori di $(\bar{w}_1 \dots \bar{w}_n)$ devono essere lin. indip
perché in volta di una base di un sottospazio
MA n vettori indep. in $V_n(\mathbb{K}) \Rightarrow$ Base di $V_n(\mathbb{K})$
 $\Rightarrow W = \mathcal{L}(\bar{w}_1 \dots \bar{w}_n) = V_n(\mathbb{K}) \quad \square$

N.B: $n < \infty$

$\rightarrow$ Se $n = \infty$

$$\mathbb{R}[x] = \{a_0 + a_1x + \dots\}$$

$$|a_i \in \mathbb{R}| \cdot \geq$$

$$\geq \mathbb{R}[x^2] := \{a_0 + a_1x^2 + a_2x^4 + \dots \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

$$\psi: \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x^2]$$

isomorf.

$$a_0 + a_1x + \dots \rightarrow a_0 + a_1x^2 + a_2x^4 + \dots$$

$$\dim \mathbb{R}[x] = \dim \mathbb{R}[x^2] = \infty \quad x \in \mathbb{R}[x] \setminus \mathbb{R}[x^2]$$